Ecuaciones lineales de una sola variable

Profa. María C. Yáñez Navarrete

Primer semestre 2024-2025

Importante

Al final de esta presentación hay un enlace a una prueba corta de Forms. Debe obtener al menos un 80% en la prueba para aprobarla.

Le exhortamos a que estudie el módulo con detenimiento antes de tomar la prueba.

Centro para el Desarrollo de Competencias Lingüísticas
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Objetivos

- Determinar si un número real dado es o no es solución de una ecuación lineal.
- Resolver ecuaciones lineales de una sola variable.
- Verificar si el valor hallado al despejar la variable es ciertamente la solución de la ecuación.
- Identificar ecuaciones que tienen infinitas soluciones y ecuaciones que no tienen solución.

Definiciones

Ecuación lineal con una variable

Centro para el Desarrollo de Competencias Lingüísticas
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Una ecuación es un enunciado que indica igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Una ecuación con una variable es lineal si se puede escribir en la forma $a\boldsymbol{x} + b = c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. La variable $\boldsymbol{x}$ representa un número real desconocido.

$3(4 + 2m) = m - 2(m - 5)$

$0.3x - 0.05 = 1$

$\frac{y + 9}{4} = 5$

$3y - 21 = 0$

$-2r = 10$

$\frac{s}{8} + 20 = -10$

$4x + 1 = 4$

$4(t - 5) = 8 + 2t$

$5(x + 3) - 9 = 2(x - \frac{1}{2}) + 7$

Ejemplos de ecuaciones <u>no</u> lineales

$\log\ (25x) = 2$ *ecuación logarítmica*

$\frac{2}{n} + 4 = 3$ *ecuación racional*

$y^2 - 2y = 24$ *ecuación cuadrática*

$\sqrt{x-6} = 5$ *ecuación radical*

$3^x = 2{,}187$ *ecuación exponencial*

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *ecuación trigonométrica*

Solución de una ecuación

Un número real es solución de una ecuación lineal si sustituir la variable por este número causa que la ecuación sea un enunciado cierto.

$-\mathbf{5}$ es solución de $-2\boldsymbol{r} = 10$

porque $-2 \cdot (-\mathbf{5}) = 10$

$10 = 10$

cierto

$\mathbf{4}$ no es solución de $-2\boldsymbol{r} = 10$

porque $-2 \cdot \mathbf{4} = 10$

$-8 = 10$

falso

Propiedades de la igualdad

Propiedades de la igualdad

La operación que haces con un número a un lado de la igualdad tienes que hacerla al otro lado con el mismo número.

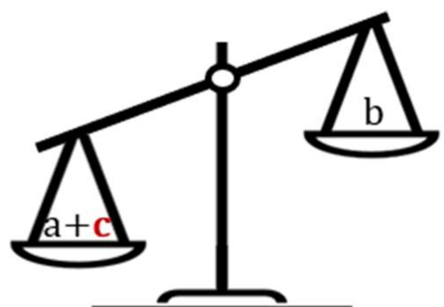
Sean a, b y c números reales.

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. (Propiedad de la suma de la igualdad)

Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$. (Propiedad de la resta de la igualdad)

Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$. (Propiedad de la multiplicación de la igualdad)

Si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$ porque la división entre 0 no está definida. (Propiedad de la división de la igualdad)



Resolver ecuaciones lineales de una sola variable

Resolver ecuaciones lineales de una sola variable

Aplicamos las propiedades de la igualdad para hallar la solución de la ecuación.

Tenemos que despejar la variable logrando que quede sola a un lado de la igualdad.

Resolver la ecuación

A la x se le está restando un número. Para dejar a la x sola,hay que sumar, a ambos lados de la igualdad, por el número que la acompaña.

$$x - 150 = 83$$

(Propiedad de la suma de la igualdad)

$$x - 150 + 150 = 83 + 150$$

$$x + 0 = 233$$

$$x = 233$$

Podemos verificar si efectivamente encontramos la solución de la ecuación sustituyendo la x por 233, y observando que resulte un enunciado cierto.

$$233 - 150 = 83$$

$$83 = 83$$

cierto

Resolver la ecuación

A la x se le está sumando un número. Para dejar a la x **sola**, hay que restar, a ambos lados de la igualdad, por el número que la acompaña.

$$x + 28.1 = 36.52$$

(Propiedad de la resta de la igualdad)

$$x + 28.1 - 28.1 = 36.52 - 28.1$$

$$x + 0 = 8.42$$

$$x = 8.42$$

Podemos verificar si efectivamente encontramos la solución de la ecuación sustituyendo la x por 8.42, y observando que resulte un enunciado cierto.

$$8.42 + 28.1 = 36.52$$

$$36.52 = 36.52$$

cierto

Resolver la ecuación

CDCL
Centro para el Desarrollo de Competencias Lingüísticas
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

La x está siendo dividida por un número.
Para dejar a la x **sola**, hay que multiplicar, a ambos lados de la igualdad, por el número que la acompaña.

$$\frac{x}{7} = 19$$

(Propiedad de la multiplicación de la igualdad)

$$8 \cdot \frac{x}{8} = 19 \cdot 8$$

$$\overset{1}{\cancel{8}} \cdot \frac{x}{\underset{1}{\cancel{8}}} = 19 \cdot 8$$

$$x = 152$$

Podemos verificar si efectivamente encontramos la solución de la ecuación sustituyendo la $\mathbf{x}$ por $\mathbf{152}$, y observando que resulte un enunciado cierto.

$$\frac{\mathbf{152}}{8} = 19$$

$$19 = 19$$ cierto

Resolver la ecuación

$$5x = 395$$

(Propiedad de la división de la igualdad)

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}x}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{395}{5}$$

$$x = 79$$

La x está multiplicada por un número.
Para dejar a la x **sola**, hay que dividir, a ambos lados de la igualdad, entre el número que la acompaña.

Podemos verificar si efectivamente encontramos la solución de la ecuación sustituyendo la **x** por **79**, y observando que resulte un enunciado cierto.

$$5 \cdot \mathbf{79} = 395$$

$$395 = 395$$

cierto

Resolver ecuaciones con paréntesis y términos semejantes

$$8(x + 4) - (x - 6) = 5x - 2$$

Para resolver esta ecuación, necesitamos remover los paréntesis y combinar los términos semejantes, además de utilizar las propiedades de la igualdad.

El factor a que está afuera de los paréntesis se multiplica por cada uno de los términos que están entre los paréntesis.

Para remover los paréntesis, utilizamos la Propiedad Distributiva:

sean a, b y c números reales, entonces $a(b + c) = ab + ac$

Si a la derecha de la operación resta hay paréntesis, a éstos los podemos remover escribiendo los opuestos de los términos que están entre los paréntesis.

(Sea n una expresión algebraica.) $n - (a - b) = n - a + b$

Términos semejantes son aquellos que tienen la parte variable idéntica: misma variable y mismo exponente.

Resolver la ecuación

El factor **8** que está afuera de los paréntesis se multiplica por cada uno de los términos que están entre los paréntesis.

$$8(x + 4) - (x - 6) = 5x - 2$$

Remover paréntesis, escribiendo los opuestos de los términos que están entre los paréntesis.

$$8x + 32 - x + 6 = 5x - 2$$

Combinar los términos semejantes.

$$8x - x + 32 + 6 = 5x - 2$$

$$7x + 38 = 5x - 2$$

Propiedad de la resta de la igualdad para tener los términos con la variable x a un solo lado de la igualdad.

$$7x - \mathbf{5x} + 38 = 5x - \mathbf{5x} - 2$$

$$2x + 38 = -2$$

Propiedad de la resta de la igualdad para tener los términos constantes a un solo lado de la igualdad.

$$2x + 38 - \mathbf{38} = -2 - \mathbf{38}$$

$$2x = -2 - \mathbf{38}$$

Propiedad de la división de la igualdad para que sea 1 el coeficiente de la x, así queda x despejada.

$$\frac{2x}{2} = \frac{-40}{2}$$

$$x = -20$$

Verificar la solución

Verificamos si -20 es efectivamente la solución de la ecuación.

$$8(x + 4) - (x - 6) = 5x - 2$$

$$8(-20 + 4) - (-20 - 6) = 5(-20) - 2$$

$$8(-16) - (-26) = -100 - 2$$

$$-128 + 26 = -100 - 2$$

$$-102 = -102$$

cierto

Ha resultado un enunciado cierto, por lo tanto -20 es solución de la ecuación $8(x + 4) - (x - 6) = 5x - 2$.

Resolver la ecuación

$$\frac{2}{5}x = 14$$

(Propiedad de la multiplicación de la igualdad)

La x está siendo multiplicada por una fracción.
Para dejar a la x sola, hay que multiplicar, a ambos lados de la igualdad, por el recíproco de la fracción que la acompaña.

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}x = 14 \cdot \frac{5}{2}$$

$$\frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{10}_{1}}x = \frac{14}{1} \cdot \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{70}{2}$$

$$x = \mathbf{35}$$

Podemos verificar si efectivamente encontramos la solución de la ecuación sustituyendo la x por **35**, y observando que resulte un enunciado cierto.

$$\frac{2}{5} \cdot \mathbf{35} = 14$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{35}{1} = 14$$

$$\frac{70}{5} = 14$$

$$14 = 14$$

cierto

Resolver la ecuación

Empezamos por buscar el mínimo común múltiplo de los denominadores 3, 4 y 9.

Multiplicamos cada término por 36.

Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, …

Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, …

Múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36, …

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 36.

$$\frac{1}{4}x - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}x$$

(Propiedad de la multiplicación de la igualdad)

$$36 \cdot \frac{1}{4}x - 36 \cdot \frac{2}{3} = 36 \cdot \frac{5}{9}x$$

$$\frac{36}{1} \cdot \frac{1}{4}x - \frac{36}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{36}{1} \cdot \frac{5}{9}x$$

$$\frac{36}{4}x - \frac{72}{3} = \frac{180}{9}x$$

Esto hará que obtengamos una ecuación equivalente en la cual los términos tengan coeficientes enteros.

$$9x - 24 = 20x$$

(Propiedad de la resta de la igualdad) $$9x - 9x - 24 = 20x - 9x$$

$$0 - 24 = 11x$$

$$-24 = 11x$$

(Propiedad de la división de la igualdad) $$-\frac{24}{11} = \frac{\cancel{11}^{1}}{\cancel{11}_{1}}x$$

$$-\frac{24}{11} = x$$

Verifiquemos si ésta es la solución.

Podemos verificar si efectivamente encontramos la solución de la ecuación sustituyendo la x por $-\frac{24}{11}$, y observando que resulte un enunciado cierto.

$$\frac{1}{4}x - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}x$$

Multiplicamos las fracciones.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{-24}{11} - \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{-24}{11}$$

$$\frac{-24}{44} - \frac{2}{3} = \frac{-120}{99}$$

Para restar las fracciones, buscamos el mínimo común múltiplo de los denominadores 3 y 44, el cual es 132.

$$\frac{-24}{44} \cdot \frac{3}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{44}{44} = \frac{-120}{99}$$

$$\frac{-72}{132} - \frac{88}{132} = \frac{-120}{99}$$

$$\frac{-72-88}{132} = \frac{-120}{99}$$

$$\frac{-160}{132} = \frac{-120}{99}$$

Simplificamos cada fracción dividiendo el numerador y el denominador por el factor común.

$$\frac{-160 \div 4}{132 \div 4} = \frac{-120 \div 3}{99 \div 3}$$

$$\frac{-40}{33} = \frac{-40}{33}$$

cierto.

Ecuaciones lineales con infinitas soluciones

Hay ecuaciones lineales que tienen infinitas soluciones,
todos los números reales son soluciones. Se denomina identidad.

Simplificamos las expresiones a ambos lados de la igualdad.

$$5(x - 4) = -7x - 6 + 12x - 14$$

$$5x - 20 = -7x + 12x - 6 - 14$$

$$5x - 20 = 5x - 20$$

Ambos lados resultan ser idénticos.

$$5x - 5x - 20 + 20 = 5x - 5x - 20 + 20$$

$$0 = 0$$

Si utilizamos las propiedades de la igualdad para tener a un lado los términos con variable y al otro lado las constantes, queda 0 = 0.
Cuidado, que esto **no significa** que no hay solución,
hay infinitas soluciones.

Podemos escoger cualquier número real y sustituirlo en la variable x, de la ecuación original o en la simplificada, y resulta un enunciado cierto.

Por ejemplo, si escogemos 0:

$$5(0 - 4) = -7 \cdot 0 - 6 + 12 \cdot 0 - 14$$

$$5(-4) = 0 - 6 + 0 - 14$$

$$-20 = -20$$

cierto

Si escogemos otro número para x, digamos 2:

$$5(2 - 4) = -7 \cdot 2 - 6 + 12 \cdot 2 - 14$$

$$5(-2) = -14 - 6 + 24 - 14$$

$$-10 = -14 - 6 + 24 - 14$$

$$-10 = -20 + 24 - 14$$

$$-10 = 4 - 14$$

$$-10 = -10$$

cierto

Escogemos otro número, el 10.

$$5 \cdot 10 - 20 = 5 \cdot 10 - 20$$

$$50 - 20 = 50 - 20$$

$$30 = 30$$

cierto

Ecuaciones lineales que no tienen solución

Hay ecuaciones lineales que NO tienen solución.
Este tipo de ecuación se denomina contradicción.

Propiedad distributiva

$$-7x + 6 + 10x - 5 = 3(x + 3)$$

$$-7x + 10x + 6 - 5 = 3x + 9$$

enunciado falso
o
contradicción

$$3x + 1 = 3x + 9$$

No existe número real que al sustituir la variable por éste, resulte la ecuación un enunciado cierto.

$$3x - 3x + 1 = 3x - 3x + 9$$

$$0 + 1 = 0 + 9$$

$$1 = 9$$

falso

Referencias

Miller, Heerens & Hornsby. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. (12 ed.) México: Pearson Education

Tobey, Slater, Blair & Crawford. (2014). *Álgebra para principiantes*. (8 ed.) Pearson

Para finalizar, haga clic sobre el enlace para tomar la prueba y enviar el informe a su profesor(a):

https://forms.office.com/r/mBJsTeL5Wx

¡Gracias por utilizar los servicios del CDCL!

Conozca más sobre nuestros servicios virtuales:
http://generales.uprrp.edu/competencias-linguisticas/